## 3.2.8 Oblouková míra

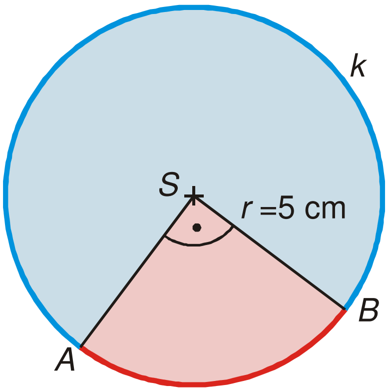
**Předpoklady:**

**Pedagogická poznámka:** Tato hodina zabere přibližně jednu a půl vyučovací hodiny. Na 45 minut je možné hodinu zkrátit buď vynecháním některých převodů na konci (vzhledem k tomu, že je studenti budou probírat ještě jednou na začátku goniometrie, to není žádná tragédie) nebo přeskočením úvodního odvozování (nedoporučuji).
Pokud mají žáci za sebou kapitolu o kruhovém pohybu ze sesterské učebnice fyziky, je stihnutí látky za 45 minut reálné, protože jde fakticky o opakování.
Pokud nestihnete všechno, je možné příklady dopočítat v následující hodině a zkrátit dokazování.

Opakování:
- obvod kružnice $o = 2\pi r$
- plný úhel: $360°$
- pravý úhel: $90°$

**Př. 1:** Urči obvod kruhu o poloměru $r = 5\,\text{cm}$.

Dosadíme do vzorce: $o = 2\pi r = 2\pi \cdot 5\,\text{cm} = 10\pi\,\text{cm} = 31{,}4\,\text{cm}$
Kruh o poloměru 5 cm má obvod přibližně 31,4 cm.




**Př. 2:** Urči na kružnici o poloměru $r = 5\,\text{cm}$ délku kružnicového oblouku se středovým úhlem $90°$.

Pravý úhel je čtvrtinou plného úhlu $\Rightarrow$ délka kružnicového oblouku bude čtvrtinou obvodu kruhu o stejném poloměru $\Rightarrow$ $d = \frac{o}{4} = \frac{2\pi r}{4} = \frac{2\pi \cdot 5}{4}\,\text{cm} = 7{,}8\,\text{cm}$

**Př. 3:** Urči na kružnici o poloměru $r$ délku kružnicového oblouku se středovým úhlem:
a) $20°$ b) $\alpha$.

obvod celé kružnice $o = 2\pi r$
a) $20°$

použijeme přímou úměrnost:

$360° \quad \dots \quad 2\pi r$

$20° \quad \dots \quad x$

$$\frac{x}{20} = \frac{2\pi r}{360} \Rightarrow x = \frac{20}{360} \cdot 2\pi r = \frac{\pi}{9} r$$

Oblouk se středovým úhlem $20°$ má délku $\frac{\pi}{9} r$

b) $\alpha$

použijeme přímou úměrnost:

$360° \quad \dots \quad 2\pi r$

$\alpha \quad \dots \quad x$

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{2\pi r}{360} \Rightarrow x = \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi r = \frac{\alpha\pi}{180} r$$

Oblouk se středovým úhlem $\alpha$ má délku $\frac{\alpha}{180} \pi r$

**Př. 4:** Doplň tabulku:

| středový úhel [otáčky] | středový úhel [ ° ] | délka oblouku o poloměru $r_1$ | délka oblouku o poloměru $r_2$ |
|---|---|---|---|
| otáčka | 360° | $2\pi r_1$ | |
| půlotáčka | | | |
| | 90° | | |
| desetina otáčky | | | |
| | 20° | | |

| středový úhel [otáčky] | středový úhel [ ° ] | délka oblouku o poloměru $r_1$ | délka oblouku o poloměru $r_2$ |
|---|---|---|---|
| otáčka | 360° | $2\pi r_1$ | $2\pi r_2$ |
| půlotáčka | 180° | $\pi r_1$ | $\pi r_2$ |
| čtvrt otáčky | 90° | $\frac{\pi}{2} r_1$ | $\frac{\pi}{2} r_2$ |
| desetina otáčky | 36° | $\frac{\pi}{5} r_1$ | $\frac{\pi}{5} r_2$ |
| osmnáctina otáčky | 20° | $\frac{\pi}{9} r_1$ | $\frac{\pi}{9} r_2$ |

postřehy:

- výpočet délky oblouku ze středového úhlu ve stupních není zrovna pohodlný. Hodnotu ve stupních vydělíme 180 a získaným číslem vynásobíme výraz $\pi r$
- výrazy pro délky oblouků jsou u obou poloměrů naprosto stejné, liší se pouze v dosazované hodnotě poloměru
- oběma obloukům v jedné řádce odpovídá stejný středový úhel $\Rightarrow$ výrazy před poloměrem jsou velikostí středového úhlu určenou v nové jednotce (ale pro určování úhlu jde o přirozenou jednotku, umožňující snadný výpočet délky oblouku podle vzorce $s = \varphi r$ ).

Jednotka úhlu umožňující výpočet délky oblouku vzorcem $s = \varphi r$ se nazývá **radián**.

**Př. 5:** Najdi v tabulce převodní vztah mezi stupni a radiány.

Každá řádka nám umožňuje napsat takový vztah: $360° = 2\pi \text{ rad}$, $180° = \pi \text{ rad}$, $90° = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$, $36° = \frac{\pi}{5} \text{ rad}$ atd.

Platí:

$$1 \text{ otáčka} = 360° = 2\pi \text{ rad}$$

Pokud udáváme velikost úhlu v radiánech, říkáme, že používáme **obloukovou míru** (radiány usnadňují výpočet délky oblouku).
Rozlišujeme:

- $\alpha \Rightarrow$ velikost úhlu v míře stupňové
- $\text{arc}\,\alpha \Rightarrow$ velikost úhlu v míře obloukové

**Pedagogická poznámka:** Bavíme se se studenty o tom, proč je nejlepší z uvedených vztahů pro převádění stupňů a radiánů vztah $360° = 2\pi \text{ rad}$ (je v něm schována myšlenka radiánů jako snadného výpočtu délky oblouku, výraz vpravo je přece téměř vzorcem pro obvod kružnice).

**Př. 6:** Je dána kružnice o poloměru *r*. Urči délku oblouku této kružnice se středovým úhlem: a)1 rad b) $0{,}5 \text{ rad}$ c) $0{,}1\pi \text{ rad}$

Středový úhel je v radiánech $\Rightarrow$ použijeme vzorec $s = \varphi r$.
a)1 rad: $s = \varphi r = 1 \cdot r = r$
b) $0{,}5 \text{ rad}$: $s = \varphi r = 0{,}5 \cdot r = 0{,}5r$
c) $0{,}1\pi \text{ rad}$: $s = \varphi r = 0{,}1\pi \cdot r = 0{,}1\pi r$

Opravdu nejde o obtížné počítání.

Ze vzorce $s = \varphi r$ vychází i definice radiánu:
**1 radián je středový úhel, který na kružnici s poloměrem *r* vytkne oblouk o délce *r*.**

**Př. 7:** Vypočti velikost 1 radiánu ve stupních.

$360° = 2\pi \text{ rad} \quad /:2\pi$

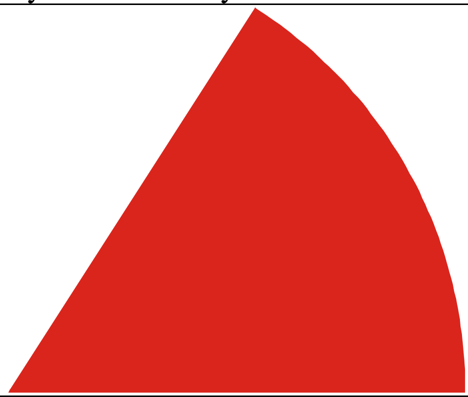
$1 \text{ rad} = \frac{360°}{2\pi} \doteq 57{,}295°$

**Př. 8:** Vypočti velikost 1 stupně v radiánech.

$360° = 2\pi \text{ rad} \quad /:360$

$$1° = \frac{2\pi}{360}\,\text{rad} = \frac{\pi}{180}\,\text{rad} \doteq 0{,}01745\,\text{rad}$$

Mnozí se brání používání radiánů, protože pro lidské uvažování není přirozenou jednotkou. I když není jednoduché si představit rozdělení kruhu na 6,283185307…. částí, 1 radián není o nic méně představitelný než jeden stupeň, jak ukazuje následující obrázek:

| výseč se středovým úhlem 1 stupeň | výseč se středovým úhlem 1 radián |
|---|---|
|  |  |

Sestavit celý kruh je dokonce značně jednodušší pomocí radiánových výsečí než pomocí výsečí stupňových:

Poslední výseč prostě není celá.

**Př. 9:** Převeď $60°$ na radiány. Výsledek vyjádři v přesném tvaru pomocí čísla $\pi$.

$$360° = 2\pi\,\text{rad} \;\Rightarrow\; 1° = \frac{2\pi}{360}\,\text{rad}$$

$$60° = 60\cdot\frac{2\pi}{360} = \frac{120\pi}{360} = \frac{\pi}{3}\,\text{rad}$$

**Př. 10:** Vyjádři v radiánech v přesném tvaru pomocí $\pi$:

a) $45°$ b) $90°$ c) $210°$

a) $45° = 45\cdot\frac{2\pi}{360} = \frac{90\pi}{360} = \frac{\pi}{4}\,\text{rad}$

b) $90° = 90\cdot\frac{2\pi}{360} = \frac{180\pi}{360} = \frac{\pi}{2}\,\text{rad}$

c) $210° = 210 \cdot \frac{2\pi}{360} = \frac{420\pi}{360} = \frac{7}{6}\pi \text{ rad}$

**Př. 11:** Vyjádři ve tvaru desetinného čísla s přesností na dvě desetinná místa v radiánech velikosti úhlů:
a) 70°   b) 358°   c) 181°

a) 70°

$$70° = 70 \cdot \frac{2\pi}{360} = \frac{7 \cdot 2\pi}{36} = 1,22 \text{ rad}$$

b) 358°

$$358° = 358 \cdot \frac{2\pi}{360} = 6,25 \text{ rad}$$

c) 181°

$$181° = 181 \cdot \frac{2\pi}{360} = 3,16 \text{ rad}$$

**Př. 12:** Vyjádři ve stupních $\frac{1}{6}\pi \text{ rad}$.

$$360° = 2\pi \text{ rad} \Rightarrow \frac{360°}{2\pi} = 1 \text{ rad}$$

$$\frac{1}{6}\pi \text{ rad} = \frac{1}{6}\pi \cdot \frac{360°}{2\pi} = \frac{180°}{6} = 30°$$

**Př. 13:** Vyjádři ve stupních:
a) $\frac{2}{3}\pi \text{ rad}$   b) $\frac{3}{2}\pi \text{ rad}$   c) $\frac{5}{6}\pi \text{ rad}$

$$360° = 2\pi \text{ rad} \Rightarrow \frac{360°}{2\pi} = 1 \text{ rad}$$

a) $\frac{2}{3}\pi \text{ rad}$

$$\frac{2}{3}\pi \text{ rad} = \frac{2}{3}\pi \cdot \frac{360°}{2\pi} = \frac{360°}{3} = 120°$$

b) $\frac{3}{2}\pi \text{ rad}$

$$\frac{3}{2}\pi \text{ rad} = \frac{3}{2}\pi \cdot \frac{360°}{2\pi} = \frac{3 \cdot 360°}{4} = 270°$$

c) $\frac{5}{6}\pi \text{ rad}$

$$\frac{5}{6}\pi \text{ rad} = \frac{5}{6}\pi \cdot \frac{360°}{2\pi} = \frac{5 \cdot 60°}{2} = 150°$$

**Př. 14:** Vyjádři ve tvaru desetinného čísla s přesností na dvě desetinná místa ve stupních velikosti úhlů: a) $\frac{\pi}{15}$ rad b) $1,1\pi$ rad c) $5$ rad d) $0,25$ rad

a) $\frac{\pi}{15}$ rad

$$\frac{\pi}{15}\,\text{rad} = \frac{\pi}{15}\cdot\frac{360}{2\cdot\pi}° = 12°$$

b) $1,1\pi$ rad

$$1,1\pi\,\text{rad} = 1,1\pi\cdot\frac{360}{2\cdot\pi}° = 198°$$

c) $5$ rad

$$5\,\text{rad} = 5\cdot\frac{360}{2\cdot\pi}° = 286,48°$$

d) $0,25$ rad

$$0,25\,\text{rad} = 0,25\cdot\frac{360}{2\cdot\pi}° = 14,32°$$

**Př. 15:** Petáková:
strana 40/cvičení 1 $\alpha$) $\omega$)
strana 40/cvičení 2 $\alpha$)
strana 40/cvičení 3 $x_1$
strana 40/cvičení 4 $y_1$) $y_4$)

**Shrnutí:** Oblouková míra (radiány) umožňuje při výpočtu délky oblouku používat vzorec $s = \varphi \cdot r$.